

# 1 はじめに

数理論理学アドヴェントカレンダー 15(=  $\dim_{\mathbb{R}} \text{SU}(4) = \dim_{\mathbb{R}} \text{SO}(6)$ ) 日目になります。本稿では、Yang-Mills 理論の非自明な古典解である instanton と、R.Penrose により導入された twistor 理論との関係について、眺めていきたいと思ひます。

## 2 時空の対称性と表現論：記法の確認

以下、本稿内で使用する記法を、対称性とその表現論の観点から整理しておきます。基本的には素粒子・弦理論で広く用いられる記法に準じるので、twistor 理論における一般的な記法とはいろいろ異なる事に注意してください。

まずお馴染みの Pauli 行列  $\tau_i$  (ここで  $i = 1, 2, 3$  または  $i = x, y, z$ ) は

$$\tau_x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_y := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

で与えられますね。これらは  $\mathfrak{su}(2)$  代数の基底をなします。

次に  $z \in \mathbb{C}$  の複素共役を  $z^*$  と書きます。  $\bar{z}$  という記号も用いますが、こちらは基本的に独立な変数であり、文脈に応じて、複素共役なものに制限するものを想定しています。対応して、群の表現  $R$  の複素共役表現を  $\bar{R}$  と書きます。<sup>1</sup>

### 2.1 4次元 Euclidean 空間に付随する対称性と複素時空

ここでは 4次元 Euclidean 空間  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^4$  を考えます。すなわち正 “定数” 計量  $h$  が与えられているとします。特に自然な大域座標  $(x^\mu)_{\mu=1,2,3,4}$  が与えられ、それに付随する接束の自然な基底が存在して、 $h_{\mu\nu}(x) = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$  と行列表示可能です。

さて、この空間には  $\text{SO}(4)$  が自然に作用しています。さらにこの群作用はその上の接束空間にも自然に作用します。物理学における、4次元 Euclidean 空間上の場 (field) は、この  $\text{SO}(4)$  の表現となっています。しかしこれは少し不正確です。

ここで次の群同型

$$\text{SO}(4) \simeq (\text{SU}(2) \times \text{SU}(2))/\mathbb{Z}_2 \quad (2)$$

ただし  $\mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  (作用は対角的)、を思い出し、物理的な場は  $\text{SO}(4)$  の表現ではなく (その普遍被覆群である)  $\text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$  の表現に属していると思う事にします。つまり、2 つの  $\text{SU}(2)$  の表現、物理の言葉で言うとスピンですが、で表されます。特に 2 つの  $\text{SU}$  を区別する場合は、 $\text{SU}(2)_- \times \text{SU}(2)_+$  と表します。

<sup>1</sup> $R^*$  はベクトル空間としての双対と混同する恐れがあるので本稿では用いません。また  $z$  が四元数と解釈できる場合、 $\bar{z}$  は四元数共役になる事を意識した記法に基本なっています。

さらに Euclidean 空間は実数体  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間と見なせますが、複素数体  $\mathbb{C}$  に拡張した複素 Euclidean 空間  $\mathbb{C}^4$  を考えます。これを複素時空と呼び、ここでは  $\mathbb{CM}$  と書きますが、今度は計量を保つ対称性

$$\mathrm{SO}(4, \mathbb{C}) \simeq (\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})) / \mathbb{Z}_2 \quad (3)$$

が姿を見せます。<sup>2</sup>

特に、この  $\mathrm{SO}(4, \mathbb{C})$  に関する群同型 (3) を、その部分群であるコンパクトな実形  $\mathrm{SO}(4)$  に制限したものが、上の (2) に他なりません。また対応して、複素時空  $\mathbb{CM}$  は実 4 次元時空  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^4$  に戻り、計量は  $\mathrm{diag}(1, 1, 1, 1)$  で与えられます。

一方で、この群同型を部分群  $\mathrm{SO}(3, 1)$  に制限する場合、

$$\mathrm{SO}(3, 1) \simeq \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) / \mathbb{Z}_2 \quad (4)$$

となり<sup>3</sup>、対応する計量は Lorentz 型  $\mathrm{diag}(1, 1, 1, -1)$  となります。同様に部分群  $\mathrm{SO}(2, 2)$  の場合は、

$$\mathrm{SO}(2, 2) \simeq (\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})) / \mathbb{Z}_2 \quad (5)$$

で、対応する計量は双曲型または Klein 型  $\mathrm{diag}(1, 1, -1, -1)$  になります。よって、複素時空を考察する事で、任意の不定計量が統一的に扱える事が分かります。<sup>4</sup>

様々な時空の計量が存在し、いずれの計量でも数学的には同種の議論が可能ですが、以降、基本的には実 Euclidean 空間  $\mathbb{E}$  または複素時空  $\mathbb{CM}$  を考える事にします。

## 2.2 spinor 表示

ここでは、群同型 (2)  $\mathrm{SO}(4) \simeq \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$  の具体的な表示について見ていきます。ここで得た表示はそのまま複素時空の場合 (3) にも拡張可能ですが、Euclidean 時空で議論するのが最も簡単であるため、上記群同型を考察します。

$\mathrm{Spin}(4)$  のベクトル表現を  $\mathbf{4}_v$  とし、その足 (基底を取った時の成分) を  $\mu, \nu, \dots$  と書きます。一方で、 $\mathrm{SU}(2)$  の  $\mathrm{spin} \frac{d-1}{2}$  表現または  $d$  次元表現を  $\mathbf{d}$  と表し、 $\mathrm{SU}(2)_- \times \mathrm{SU}(2)_+$  の表現は  $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)$  と表します。<sup>5</sup> この時、 $\mathrm{SU}(2)_-$  の足を  $\alpha, \beta, \dots$ 、 $\mathrm{SU}(2)_+$  の足を  $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dots$  で書き、 $\mathrm{SU}(2)_\pm$  で変換される量を spinor と呼びます。<sup>6</sup> 具体的な成分表示による  $\mathrm{SU}(2)_\pm$

<sup>2</sup>Hermite 計量を考えないので、対称性は  $\mathrm{U}(2)$  ではない事に注意してください。

<sup>3</sup>付随する埋め込み写像  $\iota : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) / \mathbb{Z}_2 \rightarrow (\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})) / \mathbb{Z}_2$  は、具体的には  $\iota(g) := (g, g^*)$  で与えられます。

<sup>4</sup>勿論、各対応する実スライスに制限という操作自体は、その上の幾何構造に様々な制限を課するため、一般には非自明です。

<sup>5</sup> $\mathbb{Z}_2$  で割るという操作は、 $d_1 + d_2$  が偶数である、という制限を課します。

<sup>6</sup>twistor 理論の文脈では、時空ベクトルの足はアルファベット小文字  $a, b, i, j, \dots$ 、spinor index はアルファベット大文字  $A, B, I, J, \dots$  または  $A', B', I', J', \dots$ 、内部自由度はギリシャ文字  $\alpha, \beta, \dots$  で書かれる事が多いです。

の作用は、

$$f^\alpha \rightarrow U^\alpha_\beta f^\beta \quad f^{\dot{\alpha}} \rightarrow U^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} f^{\dot{\beta}} \quad (6)$$

で与えられます。以降、 $SU(2)_+$  も同様のものを採用するとして、しばらく  $SU(2)_-$  のみに着目します。

## 2次元擬実表現

さて  $SU(2)$  の有限次元表現に関する重要な事実として、 $\mathbf{2} \simeq \bar{\mathbf{2}}$  があり、基本表現  $\mathbf{2}$  は擬実 (psuedo-real) となっています。 $\bar{\mathbf{2}}$  の成分表示を  $f_\alpha$  で書くことにすると、上の事実 (表現としての同型) は  $f^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} f_\beta$  を満たす可逆な  $\epsilon$  が存在する事を意味します (intertwining 作用素と呼ばれます)。具体的な計算よりその行列表示が  $\epsilon^{\alpha\beta} = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  ( $a \in \mathbb{C}$ ) の形で与えられる事が分かりますが、本論では  $a = 1$  と取る事にします。なお、逆作用素 (成分表示は  $\epsilon_{\alpha\beta}$ ) で、通常逆行列で与えるのが普通ですが、ここでは慣習に従って  $\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\beta}$  と、逆行列のスカラー積  $(-1)$  倍にとります。

ここで

$$f_\alpha = f^\beta \epsilon_{\beta\alpha} \quad f_{\dot{\alpha}} = f^{\dot{\beta}} \epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \quad (7)$$

$$f^\alpha = f_\beta \epsilon^{\alpha\beta} \quad f^{\dot{\alpha}} = f_{\dot{\beta}} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \quad (8)$$

の関係式が成り立つ事に注意してください。これは足が複数ある場合、すなわち  $\mathbf{2}$  と  $\bar{\mathbf{2}}$  複数個の tensor 積表現に属する場合も同様で、各 spinor の足 (成分) に着目してこの関係を要請します。また擬実性から来る

$$f^\alpha f_\alpha = 0 \quad f^{\dot{\alpha}} f_{\dot{\alpha}} = 0 \quad (9)$$

という関係は非常に重要で、後で何度も使います。

## vector 表現の spinor 表示

以上で、spinor 表現に関する記法を定めましたので、次に vector 表現  $\mathbf{4}_v$  との関係について見ていきましょう。まず、群同型 (2) より誘導される表現の対応  $\mathbf{4}_v \simeq (\mathbf{2}, \mathbf{2})$  が存在する事に注意してください。さらに  $\mathbf{4}_v$  も  $(\mathbf{2}, \mathbf{2})$  も線形表現であるので、次の一般化 Clebsch-Gordan tensor (以降、CG tensor と略) が存在します:  $S^{\alpha\dot{\beta}}_\mu$ . すなわち  $p^\mu$  を 4-vector とすると、対応する spinor 表示  $p^{\alpha\dot{\beta}}$  が

$$p^{\alpha\dot{\beta}} = S^{\alpha\dot{\beta}}_\mu p^\mu \quad (10)$$

で与えられます。

さて  $S : 4_v \rightarrow (2, 2)$  とその複素共役  $S^* : \bar{4}_v \rightarrow (\bar{2}, \bar{2})$  に対し、 $4_v$  が実表現である事と  $2$  が  $\epsilon$  経由で  $\bar{2}$  と同値である事から、 $S = (\epsilon \otimes \epsilon) \circ S^*$  が成立するように  $S$  を選べます。すなわち

$$(S^{\alpha\dot{\beta}}{}_{\mu})^* = S_{\alpha\dot{\beta}}{}^{\mu} = \epsilon_{\alpha\gamma}\epsilon_{\beta\delta} S^{\gamma\dot{\delta}}{}_{\mu}. \quad (11)$$

$S^{\alpha\dot{\beta}}{}_{\mu}$  を、 $\mu$  毎に定まる、 $\alpha\dot{\beta}$  を足とする独立な  $2 \times 2$  行列だとみなすと、 $1, i\tau_{x,y,z}$  の  $0$  でない実数倍が上の解候補となります。特に  $\det = 1$  のものを考えると、 $\pm 1, \pm i\tau_{x,y,z}$  となります。なお実際の比例定数は後で固定します。

ここから独立な 4 個を適当に並べればいだけなのですが、 $SO(4)$  の自由度から次の 2 通りのどちらかに変換可能である事が分かります：

$$(i\tau_x, i\tau_y, i\tau_z, 1) \quad (-i\tau_x, -i\tau_y, -i\tau_z, 1). \quad (12)$$

この 2 つは  $SO(4)$  ではなく、 $O(4)$  の元で移り変わる事が分かるため、いわゆる鏡映変換 (パリティ変換) の作用で移り変わります。言い換えると、 $SU(2)_-$  と  $SU(2)_+$  を入れ替える外部自己同形が存在し、これは  $SO(4)$  を  $O(4)$  に埋め込んだ際の、パリティ変換と見なせるわけです。この事は後で出てくる self-dual と anti-self-dual を入れ替える操作に対応しています。実際に、Hodge-star-作用素  $*$  が空間反転で  $(-1)$  倍される事実と対応しています。

なお、他の不定計量の場合は、対応する成分を  $\pm i$  倍すれば得られます。

## 行列表示

ここまでで  $4_v \simeq (2, 2)$  の具体的な対応が得られたわけですが、行列計算によりこの対応を見なおしてみましょう。

まだ比例定数分だけ決めていなかった CG tensor の normalization を

$$S^{\alpha\dot{\beta}}{}_{\mu} S_{\alpha\dot{\beta}}{}^{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} \quad (13)$$

を満たすように取りましょう。そして新たな記号

$$\sigma_{\mu}^{\alpha\dot{\alpha}} := (-i\vec{\tau}, 1) \quad \bar{\sigma}_{\mu\dot{\alpha}\alpha} := (i\vec{\tau}, 1) \quad (14)$$

を導入します。ここで、 $1$  は  $2 \times 2$  の恒等行列、 $\mu$  はベクトルの成分  $1, 2, 3, 4$  を走る添字、 $\alpha\dot{\alpha}$  は左にあるものを行成分、右にあるものを列成分とします。 $\bar{\sigma}$  の足が、下付きで順番も入れ替わっている理由については、後で説明します。またここで行列表示した際に、 $\sigma_{\mu}^{\dagger} = \bar{\sigma}_{\mu}$  である事に注意します。<sup>7</sup> よって、

$$S^{\alpha\dot{\alpha}}{}_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_{\mu}^{\alpha\dot{\alpha}} \quad (15)$$

<sup>7</sup>脚注 2 で述べたように、この 2 つは  $u(2)$  と  $\mathbb{H}$  との代数同型から、四元共役な関係と見なす事ができます。なお以後述べる 4 次元 instanton 解の背後には、四元数構造が実は存在します。さらにはその moduli 空間に hyperKähler 構造が存在する事の現れとも言えます。

となり、これと (10) を用いて 4-vector  $x^\mu$  の行列表示を

$$X^{\alpha\dot{\alpha}} := x^\mu S_\mu^{\alpha\dot{\alpha}} \in \mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 \simeq \text{Mat}(2, \mathbb{C}) \quad (16)$$

とおく事にします。この節では、行列である事を強調してこれを  $X$  と表す事にします。  
8

再び群同型より  $\text{SO}(4)$  の元  $U$  は、 $(\text{SU}(2) \times \text{SU}(2)) / \mathbb{Z}_2$  の元  $(U_L, U_R)$  で表せます。(16) から分かるように、4-vector の変換  $x \rightarrow Ux$  は、両側からの行列の作用  $X \rightarrow U_L X U_R^T$  で表せます。

$\bar{X} := X^\dagger$  に対しては、 $\bar{X} \rightarrow U_R^* \bar{X} (U_L^*)^T$  である事から、 $(\bar{\mathbf{2}}, \bar{\mathbf{2}})$  に属します。そして擬実表現のところで述べたように、intertwiner  $\epsilon$  を通して  $(\mathbf{2}, \mathbf{2})$  と『表現として同型』でした。実際に、

$$\bar{X}_{\dot{\alpha}\alpha} = X^{\beta\dot{\beta}} \epsilon_{\beta\alpha} \epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} = X_{\alpha\dot{\alpha}} \quad (17)$$

という関係が成立します。これから  $\bar{\sigma}_{\mu\dot{\alpha}\alpha} = (i\vec{\tau}, 1)$  と定義すべき事が分かります。

### 高階表現の対応

これまで見てきたのは、群同型  $\text{SO}(4) \simeq (\text{SU}(2) \times \text{SU}(2)) / \mathbb{Z}_2$  のそれぞれ (非自明な表現の中で) 最小な表現間の対応でした。次に  $\text{SO}(4)$  の高階の表現を考えましょう。

先の行列表示が分かりやすいので、まずはこちらで考えてみます。2 つの 4-vector  $x, y$  に対する行列表示をそれぞれ  $X, Y$  としましょう。この時  $\bar{Y} = Y^\dagger$  と定義されていた事に注意して、 $U \in \text{SO}(4)$  または  $(U_L, U_R) \in \text{SU}(2)_- \times \text{SU}(2)_+$  の作用は、

$$X\bar{Y} \rightarrow U_L X \bar{Y} U_L^\dagger \quad (18)$$

となり、 $X\bar{Y}$  は  $\text{SU}(2)_-$  の随伴表現と呼ばれる 3 次元表現 (または spin-1 表現) である事が期待できます。より正確には、次に見るように自明表現も含んでいます。

まず、 $x \otimes y$  から  $X\bar{Y}$  への基底変換に対応する CG tensor の成分表示は  $(\sigma_\mu)^{\alpha\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}_\nu)_{\dot{\alpha}\beta}$  と書けます。表現論的には

$$\mathbf{4}_v \otimes_{\mathbb{R}} \mathbf{4}_v \simeq (\mathbf{2} \otimes \mathbf{2}, \mathbf{2} \otimes \mathbf{2}) = (\mathbf{1} \oplus \mathbf{3}, \mathbf{1} \oplus \mathbf{3}) \quad (19)$$

である事を思い出しましょう。また  $\dot{\alpha}$  に関して和を取る事は、 $\text{SU}(2)_+$  に関しての自明表現 (1 次元表現  $\mathbf{1}$ ) あるいは singlet (spin-0 表現) へ射影する操作に対応します。よって上記の CG tensor  $(\sigma_\mu)^{\alpha\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}_\nu)_{\dot{\alpha}\beta}$  の像は、 $\text{SU}(2)_- \times \text{SU}(2)_+$  の表現  $(\mathbf{1} \oplus \mathbf{3}, \mathbf{1})$  に属します。

明らかに、 $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$  に対応するのは、行列表示が  $\text{Tr} [X\bar{Y}]$ 、CG tensor が  $(\sigma_\mu)^{\alpha\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}_\nu)_{\dot{\alpha}\alpha}$  です。さらに  $\text{Tr} [X\bar{Y}] = x^\mu y_\mu$  ですから、 $\text{SO}(4)$  の表現としてもこれは自明表現  $\mathbf{1}_v$  です。よって、ここからこの  $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$  を除くと  $(\mathbf{3}, \mathbf{1})$  表現が得られます。

<sup>8</sup>左辺が実数 4 つ分の自由度であるのに対し、右辺が実数 8 つ分の自由度があるように見えますが、2 は擬実表現ですから、それぞれ半分で自由度はちゃんと一致しています。

一方で、SO(4)の表現に対し、

$$\mathbf{4}_v \otimes \mathbf{4}_v \simeq \mathbf{1}_v \oplus \text{Sym}^2 \mathbf{4}_v \oplus \wedge^2 \mathbf{4}_v \quad (20)$$

である事を思い出しましょう。自明表現の対応は分かっていますが、 $(\mathbf{3}, \mathbf{1})$ は反対称表現 $\wedge^2 \mathbf{4}_v$ 、対称表現 $\text{Sym}^2 \mathbf{4}_v$ のどちらに属するのでしょうか? 表現の次元から $\text{Sym}^2 \mathbf{4}_v$ と $(\mathbf{3}, \mathbf{3})$ が対応し、 $\wedge^2 \mathbf{4}_v$ と $(\mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3})$ が対応する事が分かりますが、せっかくなので成分表示の観点から理解してみます。

上のCG tensor  $(\sigma_\mu)^{\alpha\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}_\nu)_{\dot{\alpha}\beta}$ は、 $\mathbf{2} \simeq \bar{\mathbf{2}}$ より  $(\sigma_\mu)^{\alpha\dot{\alpha}}(\sigma_\nu)_{\beta\dot{\beta}}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ と同じものです。今、 $SU(2)_-$ の3次元表現 (spin-1 表現)  $\mathbf{3}$ は $\alpha$ と $\beta$ の入れ替えについて対称でなければならない事(そのような成分に射影している)、 $\dot{\alpha}$ 、 $\dot{\beta}$ については反対称な $\epsilon$ の存在から反対称でなければならない事を用いると、 $\mu$ と $\nu$ の入れ替えについて反対称でなければなりません。

以上の考察から、SO(4)の表現は、 $(SU(2) \times SU(2))/\mathbb{Z}_2$ の表現として

$$\mathbf{1}_v \longleftrightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{1}) \quad (21)$$

$$\wedge^2 \mathbf{4}_v \longleftrightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{1}) \quad (22)$$

$$\text{Sym}^2 \mathbf{4}_v \longleftrightarrow (\mathbf{3}, \mathbf{3}) \quad (23)$$

という対応がある事が分かりました。

### 高階表現のCG tensor

前節の議論を具体的な計算で押し進めます。先の $(\sigma_\mu)^{\alpha\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}_\nu)_{\dot{\alpha}\beta}$ は $\mathbf{4}_v \otimes \mathbf{4}_v \rightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{1})$ という写像と見なせます。これに対応した分解を

$$(\sigma_\mu)^{\alpha\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}_\nu)_{\dot{\alpha}\beta} = h_{\mu\nu}\delta_\beta^\alpha - 2i(\bar{\sigma}_{\mu\nu})_\beta^\alpha \quad (24)$$

と定めると、 $\bar{\sigma}_{\mu\nu} : \mathbf{4}_v \otimes \mathbf{4}_v \rightarrow (\mathbf{3}, \mathbf{1})$ は射影作用素と見なせます。<sup>9</sup>

同様に $\mathbf{4}_v \otimes \mathbf{4}_v \rightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3})$ は

$$(\sigma_\mu)^{\alpha\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}_\nu)_{\dot{\beta}\alpha} = h_{\mu\nu}\delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} - 2i(\sigma_{\mu\nu})_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \quad (25)$$

で $\sigma_{\mu\nu} : \mathbf{4}_v \otimes \mathbf{4}_v \rightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{3})$ は、 $\bar{\sigma}_{\mu\nu}$ に直交する射影作用素と見なせます。

ちなみに $\sigma_{\mu\nu}$ と $\bar{\sigma}_{\mu\nu}$ の行列表示は、

$$(2\bar{\sigma}_{\mu\nu})_\beta^\alpha = \begin{array}{c|cccc} \mu \setminus \nu & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & \begin{pmatrix} 0 & -\tau_3 & \tau_2 & \tau_1 \\ \tau_3 & 0 & -\tau_1 & \tau_2 \\ -\tau_2 & \tau_1 & 0 & \tau_3 \\ -\tau_1 & -\tau_2 & -\tau_3 & 0 \end{pmatrix} & & & \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \\ 4 & & & & \end{array} \quad (2\sigma_{\mu\nu})_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} = \begin{array}{c|cccc} \mu \setminus \nu & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & \begin{pmatrix} 0 & \tau_3 & -\tau_2 & \tau_1 \\ -\tau_3 & 0 & \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & -\tau_1 & 0 & \tau_3 \\ -\tau_1 & -\tau_2 & -\tau_3 & 0 \end{pmatrix} & & & \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \\ 4 & & & & \end{array} \quad (26)$$

<sup>9</sup>より正確には $(\mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3})$ から自分自身の作用素と見なした時に、射影作用素となっています。

となり、確かに  $\mu, \nu$  の入れ替えで反対称となっています。ただし、行列表示 (25) における  $(\sigma_{\mu\nu})_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}$  は、 $\dot{\beta}$  が行、 $\dot{\alpha}$  が列に対応すると解釈し、 $(\sigma_{\mu\nu})_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}$  はその転置とみなします。ここで Hermite 行列  $X$  に対しては、 $(X^T)_A^B = X_A^B = \epsilon^{BD} X_D^C \epsilon_{CA}$  ( $A, B, C, D$  は同一の  $SU(2)$  の足) が成り立つ事に注意してください。

ところで、 $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathbb{R}^3$  は  $\mathbf{3}$  と表現としての同型がある事を思い出すと、 $\sigma_{\mu\nu}$  を  $\mathfrak{su}(2)$  の基底で展開する事が可能です。この展開係数を 't Hooft の  $\eta$ -symbol と呼び、 $\eta_{\mu\nu}^a$  と書きます。すなわち

$$(\sigma_{\mu\nu})_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} = \sum_{a=1}^3 \eta_{\mu\nu}^a \frac{(\tau_a)_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}}{2} \quad (\bar{\sigma}_{\mu\nu})_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} = \sum_{a=1}^3 \bar{\eta}_{\mu\nu}^a \frac{(\tau_a)_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}}{2}. \quad (27)$$

ここで自己双対・反自己双対 (言葉の意味は後述の 3.1 節参照) に関する重要な関係式

$$\sigma_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\kappa} \sigma^{\rho\kappa, a} \quad \bar{\sigma}_{\mu\nu}^a = -\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\kappa} \bar{\sigma}^{\rho\kappa, a} \quad (28)$$

$$\eta_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\kappa} \eta^{\rho\kappa, a} \quad \bar{\eta}_{\mu\nu}^a = -\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\kappa} \bar{\eta}^{\rho\kappa, a} \quad (29)$$

が成り立つ事に注意しておきます。

最後になりますが、(22) の  $\wedge^2 \mathbf{4}_v \longleftrightarrow (\mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3})$  の対応は、

$$\frac{1}{2} [(\sigma_{\mu})^{\dot{\alpha}\alpha} (\sigma_{\nu})_{\dot{\beta}\beta} - (\sigma_{\nu})^{\dot{\alpha}\alpha} (\sigma_{\mu})_{\dot{\beta}\beta}] = -i \left[ \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} (\sigma_{\mu\nu})_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} + \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}_{\mu\nu})_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \right] \quad (30)$$

と書けます。左辺は、 $\mu, \nu$  に関する反対称化となっているので、これはまさしく  $\wedge^2 \mathbf{4}_v \simeq (\mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3})$  の CG tensor による実現です。

## 2.3 4次元時空の複素構造・四元数構造

この節では、時空の代数的性質に少し触れておきます。

### 複素構造

唐突ですが、実2次元平面  $\mathbb{R}^2$  は、複素平面  $\mathbb{C}$  と同一視できる事を思い出しましょう。同様に4次元 Euclidean 空間  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^4$  も複素空間  $\mathbb{C}^2$  と同一視が可能です。

同一視の詳細は 5.3 節で見なおすとして、ここでは、次のような複素構造を考えてみましょう：

$$x^{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x^4 - ix^3 & -ix^1 - x^2 \\ -ix^1 + x^2 & x^4 + ix^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{w} & -z \\ \bar{z} & w \end{pmatrix}. \quad (31)$$

ここで  $x^\mu \in \mathbb{R}$  なので、 $\mathbb{E} = \mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C}^2$  の座標としては、 $\bar{z} = z^*$  と  $\bar{w} = w^*$  の複素共役関係が存在します。一方で、先ほど考えた複素時空  $\mathbb{CM} = \mathbb{C}^4$  の座標としては、 $x^\mu \in \mathbb{C}$

で、いずれも正則な座標となります。すなわち  $\bar{z}$  と  $z^*$ 、 $\bar{w}$  と  $w^*$  はそれぞれ独立な関係にあります。<sup>10</sup>

また微分については、

$$\partial_{\dot{\alpha}\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \partial_4 + i\partial_3 & i\partial_1 + \partial_2 \\ i\partial_1 - \partial_2 & \partial_4 - i\partial_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{\bar{w}} & \partial_{\bar{z}} \\ -\partial_z & \partial_w \end{pmatrix}. \quad (32)$$

を用いるのが便利です。

ちなみに計量については、

$$\begin{aligned} g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z} = g_{w\bar{w}} = g_{\bar{w}w} &= 1 \\ \text{otherwise} &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

となります。微分形式については、 $dx^1 \wedge dx^2 = \frac{1}{i} dz \wedge d\bar{z}$  と  $dx^3 \wedge dx^4 = \frac{1}{i} dw \wedge d\bar{w}$  より、体積形式  $d\omega_4 := \frac{1}{4!} \epsilon_{\mu\nu\rho\kappa} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\kappa$  について

$$d\omega_4 = -dz \wedge d\bar{z} \wedge dw \wedge d\bar{w} = dz \wedge dw \wedge d\bar{z} \wedge d\bar{w} = dx^{1\dot{1}} \wedge dx^{2\dot{1}} \wedge dx^{1\dot{2}} \wedge dx^{2\dot{2}} \quad (34)$$

が成立します。

## 四元数構造

やる気が出たら書きます。

## 3 ASD 方程式

この節では、今回解きたい方程式がどこから現れるか、とそれに付随する位相的な性質を述べ、方程式を前節の spinor 表示により書き直します。

### 3.1 Hodge \*-作用素による記述

$P$  を向き付けられた (滑らかな) 4次元 Riemann 多様体  $M$  上の principal  $G$ -bundle としましょう。特に、 $M$  は 4次元 Euclidean 時空と考えて差し支えありません。また  $G$  は線形 Lie 群とします。<sup>11</sup> これは物理学の言葉では、gauge 群  $G$  の (いわゆる場の古典論レベルでの) Yang-Mills 理論を考える事に他なりません。特に、 $G = U(1)$  の時、Maxwell

<sup>10</sup>不定計量を持つ Minkowski 空間  $\mathbb{M}$  や Klein 空間 (双曲空間)  $\mathbb{U}$  については、複素共役と異なる異なる関係式が得られます。

<sup>11</sup>物理学の文脈に於いては、Yang-Mills 作用を下から bound するために、対応する Lie 代数  $\mathfrak{g}$  は正定値あるいは負定値計量を持つ必要があり、 $G$  は compact 群でなければなりません。ただし位相項のみ考える場合、すなわち位相的場の量子論を考察するような場合、必ずしも  $G$  が compact である必要はありません。

理論、 $G = SU(3)$  の時、gluon だけが存在する “色力学” に相当します。以降、記号として  $A$  を接続あるいは gauge 場とし、 $F$  をその曲率あるいは電磁場 (テンソル) とします。

$F$  は、数学的には、同伴束  $ad_P := P \times_{ad} \mathfrak{g}$  に値を取る微分形式

$$\Omega^k(ad_P) := \Gamma(M; ad_P \otimes_{C^\infty(M)} \wedge^k(M)) \quad (35)$$

の元となります。局所的には、すなわち連結かつ単連結なある開被覆  $U$  (例えば極端な例では  $\mathbb{R}^4$ ) 上では、 $F \in \Omega^2(U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$  とかけます。これは  $F$  (を  $U$  に制限したものは 2-形式と Lie 代数の元のペアの和で与えられる事を意味しており、特に Lie 代数の基底を  $\{T^a\}_{a=1, \dots, \dim \mathfrak{g}}$ 、 $U$  上の局所座標を  $\{x^\mu\}_{\mu=1, \dots, 4}$  と定めると、

$$F|_U = \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} \sum_{\mu, \nu=1}^4 F_{\mu\nu}^a \left(\frac{1}{2} dx^\mu \wedge dx^\nu\right) (T^a) \quad (36)$$

と書けます。通常、素粒子物理学においてはこの記法が用いられることが多いです。なお、これらの記法に馴染みのない方は、以降、微分形式が行列の各成分にいるとみなしても差し支えありません。

またこれ以降、Lie 代数の基底に関する添字  $a$  が 2 回以上現れる場合、Einstein 縮約規則を適用するものとして総和記号  $\sum$  を省略します。

$d_A = d + A$  は付随する共変 (外) 微分、その成分表示を  $D_\mu^A = D_\mu = \partial_\mu + A_\mu$  とします。すると、 $[F \wedge \cdot] = D_A^2$  の関係にあります。成分表示では

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (37)$$

ただし  $f^{abc}$  は  $\mathfrak{g}$  の構造定数で  $[T^a, T^b] = f^{abc} T^c$ 、と表せます。

### $\Omega^2(ad_P)$ 上の内積

さて、この  $\Omega^2(ad_P)$  上には自然な “内積” (一般には複素数値に値を取りうる対称 2 次形式) が入ります。

まず、wedge 積  $\wedge : \Omega^2(M) \times \Omega^2(M) \rightarrow \Omega^4(M)$  と積分  $\int_M : \Omega^4(M) \rightarrow \mathbb{K}$  を組み合わせて、

$$\begin{aligned} \int_M \cdot \wedge \cdot : \Omega^2(M) \times \Omega^2(M) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \cup & \qquad \qquad \qquad \cup \\ (\omega_1, \omega_2) &\longmapsto \int_M \omega_1 \wedge \omega_2 \end{aligned} \quad (38)$$

という内積が定義されます。ただし、 $M$  が non-compact 多様体の場合、この積分が well-defined になるような範囲に制限するとします。これは物理学の言葉では、無限遠での境界条件を課す事に相当します。

一方で、Lie 代数上の内積

$$\langle, \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K} \quad (39)$$

が定まっているとしましょう。例えば  $G$  が compact 半単純 Lie 代数の時は、Killing form  $B(\cdot, \cdot)$  を用いて、正定値計量  $\langle, \rangle = -\frac{1}{2h^\vee} B$  (ここで  $h^\vee$  は dual Coxeter number) と定まります。

以降、この2つを組み合わせる事で、 $\alpha, \beta \in \Omega^2(ad_P)$  に対し、その上の内積を

$$\int_M \langle \alpha \wedge, \beta \rangle \quad (40)$$

で表します。

この時、Yang-Mills 作用は

$$S_{YM}[A] = \frac{1}{2} \int_M \langle F \wedge, *F \rangle = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (41)$$

で与えられます。<sup>12</sup>

### Hodge \*-作用素による固有値分解と Yang-Mills 作用の bound

さて  $M$  上の 2-形式の空間  $\Lambda^2(M)$  では、Hodge\*-作用素による変換の下で閉じている事、かつ計量の正定値性より  $*^2$  は恒等作用素に一致している事を使うと、

$$\Lambda^2(M) = \Lambda_+^2(M) \oplus \Lambda_-^2(M) \quad * \Lambda_\pm^2(M) = (\pm 1) \Lambda_\pm^2(M) \quad (42)$$

という直和直交分解が存在します。対応して、各点で 2 形式と  $\mathfrak{g}$  に値を取る切断も

$$\begin{array}{ccc} \Omega^2(ad_P) & = & \Omega^2(ad_P)_+ \oplus \Omega^2(ad_P)_- \\ \Psi & & \Psi \\ F & = & F_+ + F_- \end{array} \quad (43)$$

と分解されます。

さて、これ以降、 $G$  は compact 簡約 Lie 代数と仮定し、(40) で積分を行わない内積  $\langle \wedge, \rangle$  は正定値であるとしましょう。この時、Yang-Mills Lagrangian ( (41) の被積分-微分形式) に対しこの分解を代入すると、

$$\langle F \wedge, *F \rangle = |F_+|^2 + |F_-|^2 \geq 0 \quad (44)$$

となるので、 $S_{YM}[A] \geq 0$  である事が分かります。ただしここで

$$|\omega|^2 := \langle \omega \wedge, * \omega \rangle \quad \text{for } \omega \in \Omega^2(ad_P) \quad (45)$$

---

<sup>12</sup> $T^a$  は適当に正規化しています。

と定義して、 $\Omega^2(ad_P)$  のノルムを導入しました。一方で、

$$\langle F \wedge, F \rangle = |F_+|^2 - |F_-|^2 \quad (46)$$

は正の値も負の値も取り得ます。しかしながらこの量は、vector bundleにおいて、2nd Chern classまたは1st Potryagin classと呼ばれる量に対応しており、<sup>13</sup>

$$\int_M \langle F \wedge, F \rangle = 8\pi^2 k \quad k \in \mathbb{Z} \quad (47)$$

が言えます。

さらに YM 作用に関する BPS 不等式

$$\langle F \wedge, *F \rangle = \langle F \wedge, F \rangle + 2|F_-|^2 \geq \text{Tr} [F \wedge F] \quad (48)$$

$$= -\langle F \wedge, F \rangle + 2|F_+|^2 \geq -\text{Tr} [F \wedge F] \quad (49)$$

に注意すると、

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_M \text{Tr} [F \wedge *F] \geq |k| \quad (50)$$

と下から抑えられます。そして、この等号が成立するのは、

$$F_+ = \frac{F + *F}{2} = 0 \quad (51)$$

または

$$F_- = \frac{F - *F}{2} = 0 \quad (52)$$

が成立する時のみに限ります。とりわけ、 $|F_+| = 0 \iff k \leq 0$ 、 $|F_-| = 0 \iff k \geq 0$ です。そして、この極小解を与える (51) を反自己双対 (anti self-dual、略して ASD) 方程式、(52) を自己双対 (self-dual、略して SD) 方程式と呼びます。

この SD 方程式を満たす解を、 $k$ -instanton 解、この ASD 方程式を満たす解を、 $k$ -anti-instanton 解と呼びます。なお、この整数  $k$  をこの instanton の instanton 数と呼びます。

今、 $A$  の滑らかな微小変形に対し、instanton 数 (1st Pontryagn class) は不連続に変化できません。よって、この instanton 解は局所安定 (極小値解すなわち運動方程式の解) です。

ちなみに  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^4$  の場合、その無限遠境界は  $S^3$  であり、instanton 数  $k$  はこの  $S^3$  から  $G$  への gauge 変換関数の巻きつき数と解釈できます。これは位相幾何学的には、任意の compact 単純 Lie 群  $G$  に対し、 $\pi_3(G) \sim \mathbb{Z}$  (ただし基準となる generator は気にしない) である事実に対応しており、任意の compact 単純 Lie 群  $G$  に対し、instanton 解が存在する事が期待されます。

※気が向いたら、細かい計算を書くかも

<sup>13</sup>正確には  $G$  が  $U(1)$ -factor を持つ時は、1st Chern class が現れます。しかしこの場合も同様の議論が成立します。

## U(1) の場合

$\pi_3(U(1))$  は自明群なので、 $\mathbb{R}^4$  上の (有限エネルギー) instanton 解は存在ませんが、 ${}^{14}G = U(1)$  の場合に具体的な表式を確認しておくのは有益です。これは

$$F_{0i} = \pm \epsilon_{ijk} F_{jk} \quad \text{for } i, j, k \in \{1, 2, 3\} \quad (53)$$

で、電場  $E$  と磁場  $B$  で表現すると、

$$E_i = \pm B_i \quad (54)$$

という表式を得ます。よって、局所的には (Euclidean 空間の意味での) エネルギー・運動量の流れのない配位である事が分かります。これは後で見るように、 $SU(2)_\pm$  の spin-1 表現として振る舞うので、特殊な ‘偏光状態’ にあるとも言えます。<sup>15</sup>

## 3.2 spinor による (反) 自己双対条件の記述

今度は spinor 基底表示の観点から SD/ASD 方程式を捉えてみましょう。

曲率・電磁場の spinor 表示を

$$F^{\alpha\dot{\alpha}}{}_{\beta\dot{\beta}} := F_{\mu\nu} (S^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} (\bar{S}^\nu)_{\beta\dot{\beta}} = \frac{1}{2} [F_{\mu\nu} (\sigma^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} (\bar{\sigma}^\nu)_{\beta\dot{\beta}}] \quad (55)$$

で定義すると、(30) より、

$$F^{\alpha\dot{\alpha}}{}_{\beta\dot{\beta}} = \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \bar{f}_{\beta}^{\alpha} + \delta_{\beta}^{\alpha} f_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \quad (56)$$

と分解されます。ここで、

$$\bar{f} := -\frac{i}{2} \bar{\sigma}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad f := -\frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (57)$$

と定義しました。なお、全く等価な

$$F_{\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\beta} \bar{f}_{\alpha\dot{\beta}} + \epsilon_{\alpha\dot{\beta}} f_{\alpha\dot{\beta}} \quad (58)$$

<sup>14</sup>非可換時空上で考えると、UV カット オフが入るので、instanton が安定化して、有限エネルギー解が存在します。

<sup>15</sup>ややこしい事に、Minkowski 空間と Euclidean 空間で偏光の解釈が少し異なり、前者では2つの spinor が複素共役の関係にあるため、“左回り”と“右回り”は1つの既約な複素表現として振る舞います。この時の weight を helicity と呼んでいます。一方で今考えている後者では、独立な表現となり、“左回り”と“右回り”の自由度も独立となっていますが、これらも負または正の helicity がある (これは \* の固有値に対応)、と言う事があります。

という式を後で用います。ついでに  $f$  と  $\bar{f}$  の行列表示も見ておくと、

$$\bar{f}_{\beta}^{\alpha} = \frac{i}{2} \times \begin{array}{c|cc} \alpha \setminus \beta & 1 & 2 \\ \hline 1 & (F_{43} + F_{12}) & (F_{41} + F_{23}) - i(F_{42} + F_{31}) \\ 2 & (F_{41} + F_{23}) + i(F_{42} + F_{31}) & -(F_{43} + F_{12}) \end{array} \quad (59)$$

$$f_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} = \frac{i}{2} \times \begin{array}{c|cc} \dot{\beta} \setminus \dot{\alpha} & 1 & 2 \\ \hline 1 & (F_{43} - F_{12}) & (F_{41} - F_{23}) - i(F_{42} - F_{31}) \\ 2 & (F_{41} - F_{23}) + i(F_{42} - F_{31}) & -(F_{43} - F_{12}) \end{array} \quad (60)$$

で与えられます。

さて、ASD 方程式 (51)  $F = - * F$  を成分表示すると、

$$F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\kappa} F^{\rho\kappa} \quad (61)$$

ですから、ASD 方程式の spinor 表示は  $(\mathbf{1}, \mathbf{3})$  成分が消える条件

$$f_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} = 0 \quad \text{for } \dot{\alpha}, \dot{\beta} = 1, 2 \quad (62)$$

となり、 $(\mathbf{1}, \mathbf{3})$  が自己双対パートとなります。これは (28) の関係式からも導けますが、 $F_{\mu\nu}$  と違い、 $\sigma_{\mu\nu}$  は自己双対な関係である事に注意してください。これは自己双対パートと反自己双対パートが直交している事に対応します。

一方で、 $(\mathbf{3}, \mathbf{1})$  成分は反自己双対 (ASD) パートに対応し、SD 方程式は

$$\bar{f}_{\alpha}^{\beta} = 0 \quad \text{for } \alpha, \beta = 1, 2 \quad (63)$$

です。

以上より、電磁場の  $*$  による固有値分解は、固有値  $\pm 1$  に対応して、 $SU(2)_{\pm}$  の  $\mathbf{3}$  表現に属する事が分かりました。

### 自己双対・反自己双対形式の基底と複素構造

まず  $\Omega^2(\mathbb{E})$  の基底として、

$$\omega_{\pm}^1 := dx^4 \wedge dx^1 \mp x^2 \wedge dx^3 = i(dz \wedge dw_{\pm} - d\bar{z} \wedge d\bar{w}_{\mp}) \quad (64)$$

$$\omega_{\pm}^2 := dx^4 \wedge dx^2 \mp x^3 \wedge dx^1 = -dz_{\pm} \wedge dw - dz_{\mp} \wedge d\bar{w} \quad (65)$$

$$\omega_{\pm}^3 := dx^4 \wedge dx^3 \mp x^1 \wedge dx^2 = i(\pm dz \wedge d\bar{z} + dw \wedge d\bar{w}) \quad (66)$$

が存在します。ここで複素座標は、(31) で定義されていますが、 $z_{+} = z, z_{-} = \bar{z}$  と  $w_{+} = w, w_{-} = \bar{w}$  という記号を導入しました。

一方で、表現論的に自然な基底も存在します。行列表示 (31) から、 $z, w$  の成分 (正則パート) は、 $SU(2)_+$  の基本表現  $\mathbf{2}$  に対する lowest weight (half-spin の down 成分) に対応する事が分かります。よって、

$$\begin{aligned} +1 \quad d\bar{z} \wedge d\bar{w} &= i\omega_+^1 - \omega_+^2 \\ 0 \quad dz \wedge d\bar{z} + dw \wedge d\bar{w} &= -i\omega_+^3 \\ -1 \quad dz \wedge dw &= -i\omega_+^1 - \omega_+^2 \end{aligned} \quad (67)$$

は  $SU(2)_+$  の 3次元表現 (3重項、spin-1 表現) をなします。前節で見たように、これらは Hodge  $*$ -作用素の作用の元で、不変ですから

$$\Omega_+ \otimes \mathbb{C} = \underbrace{\Omega^{2,0}}_{\text{spin } -1} \oplus \underbrace{\Omega^{0,2}}_{\text{spin } +1} \oplus \underbrace{\mathbb{C}\omega_{\text{Kähler}}}_{\text{spin } 0} \quad (68)$$

という分解が成立します。ここで  $\Omega^{p,q} = \Omega^{p,q}(\mathbb{C}^2)$  は与えられた複素構造に関する  $(p, q)$  型の微分形式、 $\omega_{\text{Kähler}} = \omega_+^3 \in \Omega^{1,1}$  は  $\mathbb{C}^2$  上の計量に付随する Kähler form です。

一方で反自己双対 2-形式については、相補的な関係

$$\Omega^{1,1} = \Omega_- \oplus \mathbb{R}\omega_{\text{Kähler}} \quad (69)$$

が常に成立します。この事実は、後の 5.3節にて使います。

## 4 複素時空への拡張と twistor 空間

この節以降、いよいよ複素時空上に舞台を移します。ここで注意すべきなのが、 $F$  は  $\text{CM} = \mathbb{C}^4$  上の微分形式へ正則に拡張されますが、微分形式表示の ASD 方程式 (51) は、その部分多様体である実時空上でのみ定義されるという点です。

一方で、表現論的な分解  $\wedge^2 \mathbf{4}_v \simeq (\mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3})$  は  $SO(4)$  対称性を複素化した  $SO(4, \mathbb{C})$  対称性に関しても成立するため、(62) は常に有効です。

また時空の複素化に伴い、gauge 群についても注意を払う必要があります。 $\mathbb{R}^n$  上の (定数でない) 関数  $f(x)$  を、 $\mathbb{C}^n$  上の正則関数に拡張しようすると、Cauchy-Riemann 方程式より  $f(x)$  は必ず実数でない複素数に値を取らねばなりません。コンパクト Lie 群というのは、対応する複素化 Lie 群のコンパクト実形になっており、<sup>16</sup> 同様の議論から gauge 群も複素化する必要がある事が分かります。<sup>17</sup>

<sup>16</sup>これらの Lie 代数の行列表示の Hermite 性は、実数が、複素数における複素共役写像の固定点集合である事実の拡張と捉えられる、という視点でも構いません。

<sup>17</sup>ただし  $\mathbb{C}^n$  の定数関数が許されるように、gauge 変換が定数の場合、すなわち大域対称性の場合、この限りではありません。

## 4.1 複素電磁場の計測と平坦条件

複素磁場中の複素電磁場を“計測”する事を考えましょう。そのためには、ある曲面を用意して、そこを貫く電磁場を測定する事を考えれば良さそうですが、ここでは平坦な曲面、すなわち平面のみ考えます。ただし、今は ASD 方程式を満たす電磁場だけ考えているので、磁場のみ計測すれば十分でしょう。

よって、曲率・電磁場  $F$  を  $\mathbb{C}M$  の複素 2 次元平面  $N$  に射影する事を考えます。平面  $N$  は 2 つの複素ベクトル  $k, l \in \mathbb{C}^4$  で張られる ( $N = \langle k, l \rangle$ ) としましょう。今は平坦空間を考えているので、これは定数ベクトル場  $k, l \in \Gamma(N, TN)$  を生成します。数学的には、曲率・電磁場は  $\Omega^2(ad_P)$  の元であったので、

$$F(k, l) = \iota_{\ell} \iota_k F \in \Omega^0(ad_P|_N) = \Gamma(N, ad_P|_N) \quad (70)$$

が求めるものとなります。

これは成分で書き下すと

$$F|_N = k^\mu \ell^\nu F_{\mu\nu} = k^{\alpha\dot{\alpha}} \ell^{\beta\dot{\beta}} (\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{f}_{\alpha\beta} + \underbrace{\epsilon_{\alpha\beta} f_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}}_{=0}) = (k^{\alpha\dot{\alpha}} \ell^{\beta\dot{\beta}} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}) \bar{f}_{\alpha\beta}. \quad (71)$$

途中で、ADS 方程式 (62) を用いました。

これで  $k, l$  を張る任意の平面を貫く複素電磁場 (面積は  $k, l$  から定まります) を計測する事ができました。

### 電磁場の通らない平面：平坦条件

さて、この計測した電磁場が 0 となるのはどのような平面を選んだ時でしょうか？

$$F|_N = 0 \iff k^{\alpha\dot{\alpha}} \ell^{\beta\dot{\beta}} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = 0 \quad \text{for } \forall \alpha, \beta = 1, 2 \quad (72)$$

行列の掛け算とみなすと、一般性を失うことなく、 $\det(k) = 0$  とおけます。このような 4-ベクトルは null であると言います。<sup>18</sup> よって、 $k$  は階数 1 の行列となるので、ある  $\lambda^\alpha$  と  $\tilde{\lambda}^{\dot{\alpha}}$  が non-zero の関数倍を除いて一意に存在して、

$$k^{\alpha\dot{\alpha}} = \lambda^\alpha \tilde{\lambda}^{\dot{\alpha}} \quad (73)$$

と分解できます。これを再び (72) に代入すると、

$$\ell^{\beta\dot{\beta}} \tilde{\lambda}_{\dot{\beta}} = 0 \quad (74)$$

<sup>18</sup>一般に (付随する 2 次形式が単位行列となるような) 複素ベクトル空間  $\mathbb{C}^n$  のベクトル  $z$  に対し、 $z_i$  をベクトルの成分として、null 条件  $\sum_{i=1}^n (z_i)^2 = 0$  を満たすベクトルを null ベクトルと呼びます。

が  $\beta = 1, 2$  について成立します。よって、やはり  $\lambda$  は行列として  $\det l = 0$  を満たすので  $k$  と同様の分解が得られます。特に、(74) より、

$$\ell^{\beta\dot{\beta}} = \nu^\beta \tilde{\lambda}^{\dot{\beta}} \quad (75)$$

と分解できます。ここで気になるのが、 $k$  と  $l$  をベクトルして線形独立に取れるか、という点ですが、 $\lambda \not\propto \nu$  であれば、 $k$  と  $l$  は独立である事が分かります。

もう少し  $k, l$  について見てみます。

$$0 = \det(k) = \frac{1}{2} k_\mu k^\mu \quad (76)$$

より、 $k, l$  は null-vector である事が分かります。

注意すべきなのが、null 条件は、一般に線形演算で閉じていませんが、(73) と (75) より、 $k, l$  任意の線形和は null-vector である事が分かります。よって、 $k$  と  $l$  の張る平面は、任意の接ベクトルが null である事が分かりました。一般に任意の接ベクトルが null となる  $n$  次元平面を null  $n$ -plane 呼びます。

以上より、ASD 方程式の任意の複素電磁場解に対し、複素磁場が貫通していないような平面は、その任意の接ベクトルが  $SU(2)_+$  に関して共通の spinor を持つ null 2-plane である、という事が言えました。以降、この null 2-plane を  $\alpha$ -plane と呼びます。

実はこの主張の逆をたどる事は可能であり、このような任意の  $\alpha$ -plane に対して、複素磁場が貫通していないような複素電磁場解は ASD 方程式を満たす事が言えます。

$\mathbb{P}$  を  $\alpha$ -plane のなす集合とします。この時、

$$F \in \Omega_-^2(ad_P) \iff F|_{\tilde{Z}} = 0 \quad \text{for } \forall \tilde{Z} \in \mathbb{P}. \quad (77)$$

## Remark

null 4-vector の spinor 分解 (73) において、 $\lambda, \tilde{\lambda}$  は、次の  $\mathbb{C}^* = GL(1, \mathbb{C})$  作用の自由度が存在します：

$$(\lambda, \tilde{\lambda}) \longrightarrow (c\lambda, c^{-1}\tilde{\lambda}) \quad \text{for } c \in \mathbb{C}^*. \quad (78)$$

これは helicity を charge とする、 $GL(1, \mathbb{C})$  の gauge 変換と見なせます。

## 4.2 平坦可積分条件としての ASD 方程式

さらに ASD 方程式を書きなおしてみます。(71)、(73)、(75) より、任意の  $\tilde{\lambda} \neq 0$  に対して、

$$\tilde{\lambda}^{\dot{\alpha}} \tilde{\lambda}^{\dot{\beta}} f_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = 0 \quad (79)$$

が成り立ちます。

特に  $\zeta := \frac{\tilde{\lambda}^2}{\tilde{\lambda}^1} = -\frac{\tilde{\lambda}_1}{\tilde{\lambda}_2} \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{CP}^1$  とおくと、

$$\zeta^2 f_{11} - \zeta(f_{12} + f_{21}) + f_{22} = 0 \quad (80)$$

となります。

さらに  $f$  と  $\bar{f}$  の spinor 表示 (60) と CM の正則座標 (31) を用いると、

$$f_{11} = F_{\bar{z}\bar{w}} \quad f_{12} = \frac{1}{2}(F_{w\bar{w}} + F_{z\bar{z}}) \quad f_{22} = F_{zw} \quad (81)$$

$$\bar{f}_{11} = -F_{z\bar{w}} \quad \bar{f}_{12} = \frac{1}{2}(F_{w\bar{w}} - F_{z\bar{z}}) \quad \bar{f}_{22} = -F_{\bar{z}w} \quad (82)$$

が分かります。最後に曲率・電磁場の共変微分表示  $F = d_A^2$  またはその成分表示  $F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]$  を用いると、

$$[D_{\bar{z}} + \zeta D_w, D_{\bar{w}} - \zeta D_z] = 0 \quad (83)$$

というシンプルな表示が得られます。すなわち、ASD 方程式は  $\zeta \in \mathbb{CP}^1$  でパラメトライズされた2つの共変微分の可換条件とも同値です。

### 平坦条件と $\alpha$ -plane

実は (やっている事は全く等価ですが) もう少し簡単な導出があります。 $\alpha$ -plane 方向の共変微分を考えましょう。すなわち  $k$  をその接ベクトルとして、

$$k^\mu D_\mu = \lambda^\alpha \tilde{\lambda}^{\dot{\alpha}} D_{\dot{\alpha}\alpha} =: \lambda^\alpha D_\alpha \quad (84)$$

として定義されます。これを複素座標の共変微分で書き直すと、

$$D_{\alpha=1} = \tilde{\lambda}^{\dot{1}} [D_{\bar{w}} - \zeta D_z] \quad (85)$$

$$D_{\alpha=2} = \tilde{\lambda}^{\dot{1}} [D_{\bar{z}} + \zeta D_w] \quad (86)$$

ですから、(83) は

$$[D_{\alpha=1}, D_{\alpha=2}] = 0 \quad (87)$$

です。すなわち  $\alpha$ -plane に沿った共変微分の可換条件です。これは  $F$  を反自己双対部分へ制限しても、ある共変微分  $D_\alpha$  が存在して、その交換子でかける事を意味しています。

### 一般化反自己双対階層

啓示を受けたら書きます。

### 4.3 twistor 空間

ここでは CM 内に  $\alpha$ -plane のなす空間について考えてみます。

(4.1) 節での議論から、 $\alpha$ -plane の向き、すなわちその上の適当な点  $p$  における null な接平面  $T_p N \subset TCM$  の選び方は、 $\tilde{\lambda}$  で定まります。<sup>19</sup> 言い換えると、2 つの  $\alpha$ -plane が与えられた時、そこに付随する  $\tilde{\lambda}$  が (複素定数除き) 一致していれば、平行である事が言えます。この接平面に“直交”する方向における位置を決めれば、 $\alpha$ -plane が一意に指定できる事が期待されます。

そのために  $\alpha$ -plane 上の任意の 2 点  $x_1, x_2$  を選んでできます。すると 4 次元複素ベクトルとしての差  $x_1 - x_2$  は、前節で選んだ  $k$  と  $l$  で張られるベクトルなので  $k, l$  の spinor による分解 (73) と (75) を思い出すと、ある  $\lambda^\alpha \in \mathbb{C}^2$  が存在して

$$x_1^{\alpha\dot{\alpha}} - x_2^{\alpha\dot{\alpha}} = \lambda^\alpha \tilde{\lambda}^{\dot{\alpha}} \quad (88)$$

を満たします。よって、 $\tilde{\lambda}^{\dot{\alpha}} \tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}} = 0$  より

$$x_1^{\alpha\dot{\alpha}} \tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}} = x_2^{\alpha\dot{\alpha}} \tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}} \quad (89)$$

ですから、

$$\mu^\alpha := x^{\alpha\dot{\alpha}} \tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}} \quad (90)$$

で定義される量は、同一の  $\alpha$ -plane 上の点  $x$  の選び方に依存しない事が分かります。

実際にこの  $\mu^\beta$  を、 $\alpha$ -plane に沿って微分してみましょう。すると

$$\partial_\alpha \mu^\beta = \tilde{\lambda}^{\dot{\alpha}} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} x^{\beta\dot{\beta}} \tilde{\lambda}_{\dot{\beta}} = \delta_\alpha^\beta \tilde{\lambda}^{\dot{\alpha}} \tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}} = 0 \quad (91)$$

で消えます。 $\mu^\beta$  が  $\alpha$ -plane 方向の微分で変わらない、 $\alpha$ -平面上定数である事から、 $\alpha$ -plane に直交した座標と解釈できる事と consistent と言えます。

以上、この  $(\mu^\alpha, \tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}}) \in \mathbb{C}^4$  のなす空間を twistor 空間と呼びます。

逆に、 $\tilde{\lambda} \neq 0 \in \mathbb{C}^2$  と  $\mu \in \mathbb{C}^2$  を選んでくれば、方程式 (90) の解は平面をなし、明らかに  $\alpha$ -plane になる事が分かります。より正確には、 $c \in \mathbb{C}^*$  に対し、 $(\tilde{\lambda}, \mu)$  と  $(c\tilde{\lambda}, c\mu)$  は同じ  $\alpha$ -plane を与えるため、この  $\mathbb{C}^*$  作用の分だけ同一視を行う必要があります。

まとめると、 $\alpha$ -plane のなす空間  $\mathbb{P}$  は、 $(\mu, \tilde{\lambda}) \in \mathbb{C}^4$  を  $\mathbb{C}^*$  で割った複素 3 次元射影空間の  $\lambda \neq 0$  を満たす部分空間に他なりません。すなわち

$$\mathbb{P} = \{[(\mu, \tilde{\lambda})] \in \mathbb{CP}^3 \mid \tilde{\lambda} \neq 0 \in \mathbb{C}^2\}. \quad (92)$$

この  $\mathbb{P}$  を複素時空 CM の projective twistor space と呼びます。

<sup>19</sup>本稿で、 $\alpha$ -plane の“向き”と言った際は、 $\alpha$ -plane 上の向き構造ではなく、 $T_p CM = T_p N \text{ plus } N_p N$  の分解方向の意味で用います。

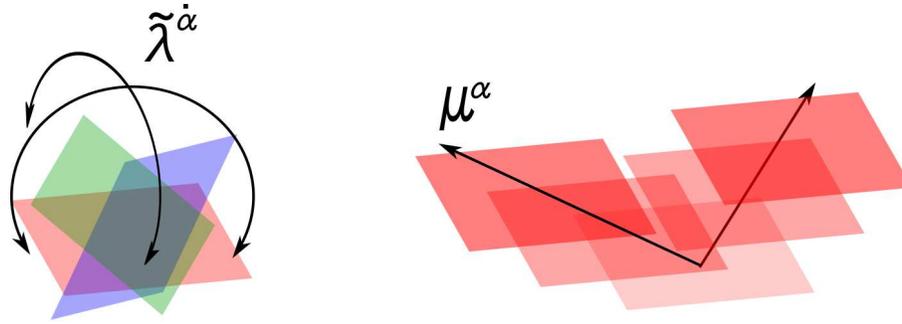


Figure 1:  $\alpha$ -plane の方向を決めるパラメータ  $\tilde{\lambda}$  (左) と位置を決めるパラメータ  $\mu$  (右)

#### 4.4 複素時空のコンパクト化

(92) を眺めてみると、 $\tilde{\lambda} = 0$  かつ  $\mu \neq 0$  の “点” (射影直線をなす) を追加すれば、複素射影空間  $\mathbb{C}P^3$  に拡張されます。これは何を意味するのでしょうか？

これは  $\mu$  と  $\tilde{\lambda}$  の関係式 (90) を眺めてみると一目瞭然です。 $\tilde{\lambda} = 0$  で  $\mu$  が有限の値の時、 $x$  の幾つかの成分は  $\infty$  になっています。すなわち、形式的には、時空  $\mathbb{C}M$  の無限遠 “点” で成立する関係式です。これを加えるというのは、複素時空のコンパクト化に他なりません。

また時空の無限遠 “点” はもうひとつ解釈があります。それは、2 つの平行な  $\alpha$ -plane の交点としての役割です。無限遠にあるのは、点ではなく  $\mu^{\alpha}$  で指定される射影直線である事を思い出しますと、2 つの平行な  $\alpha$ -plane 間の相対方向を変えると、無限遠で交差する点も異なるものになる、と解釈できます。

以下、無限遠を加えた複素時空を  $\overline{\mathbb{C}M}$  とかきますが、その幾何学的な詳細は 5.2 節で述べる事にします。

## 5 幾何学的視点に基づく twistor 空間

前節で述べた話を、より幾何学的な視点から眺め、幾つかの関係を導出しておきましょう。

### 5.1 Klein-Penrose 対応

複素時空  $\mathbb{C}M$  内の  $\alpha$ -plane をパラメトライズする空間として、projective twistor 空間を導入しました。すなわち  $\mathbb{P}T$  の点  $Z$  は、時空  $\mathbb{C}M$  の部分多様体を与えます。これを  $\tilde{Z}$  と書く事にします。今度は逆に、時空の一点  $x$  から  $\mathbb{P}T$  の領域への写像を定義してみましょう。これは  $x$  を通る  $\alpha$ -平面全体の集合で定義するのが自然でしょう。

(90) より、 $\mathbb{C}M$  と  $\mathbb{P}$  の間の関係は

$$\begin{pmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{11} & x^{12} \\ x^{21} & x^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 \\ \tilde{\lambda}_2 \end{pmatrix} = \tilde{\lambda}_2 \begin{pmatrix} -\zeta \bar{w} - z \\ -\zeta \bar{z} + w \end{pmatrix} \quad (93)$$

で与えられますが、この式から  $x \in \text{CM}$  と  $\tilde{\lambda} \in \mathbb{CP}^1$  が決まると、 $\mu$  は一意に定まります。よって、複素時空の点  $x$  に対応する  $\mathbb{P}$  内の部分多様体を  $\hat{x}$  と表すと、これは  $\mathbb{CP}^1$  に正則同型です。

とりわけ

$$\pi : \mathbb{P} \ni [(\mu^\alpha, \tilde{\lambda}_\alpha)] \mapsto [\tilde{\lambda}_\alpha] \in \mathbb{CP}^1 \quad (94)$$

という射影が得られますが、これより  $\mathbb{P}$  は  $\mathbb{CP}^1$  上の  $\mathbb{C}^2$ -fibration とみなせます。この時、 $\hat{x}$  は  $\mathbb{CP}^1$  上の各点  $\tilde{\lambda}$  に対し、 $\mathbb{C}$  の点  $\mu$  を 1 つ定めるので、この fibration の切断を定めると言う事ができます。まとめると、複素時空  $\text{CM}$  とは、 $\mathbb{P}$  の  $\mathbb{CP}^1$  と正則同型な切断をパラメトライズする空間である事が言えます。

複素時空  $\text{CP}$  とその twistor 空間  $\mathbb{P}$  の間には、以下の Klein-Penrose 対応があります:

$$\begin{aligned} \text{CM} \supset \tilde{Z} &\iff Z \in \mathbb{P} \\ \cup &\quad \cap \\ \text{CM} \ni x &\iff \hat{x} \subset \mathbb{P}. \end{aligned} \quad (95)$$

ここで  $\tilde{Z}$  は  $\text{CM}$  の  $\alpha$ -plane、 $\hat{x}$  は  $\pi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{CP}^1$  の正則切断です。

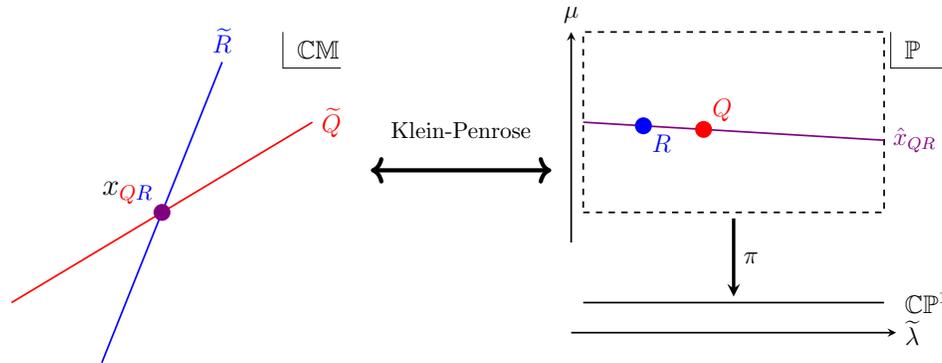


Figure 2: 複素時空  $\text{CM}$  と twistor 空間  $\mathbb{P}$  の間の対応。  $\text{CM}$  の点  $x$  を通る 2 つの  $\alpha$ -plane は、 $\hat{x}$  上の点になっています。また  $\hat{x}$  は、 $\pi : \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{CP}^1$  のファイバーと横断的に交差しています。

ここで後で用いる重要な性質を紹介します。

$\mathbb{P}$  の異なる 2 点  $Q, R$  を取り、その各  $\alpha$ -plane の共通部分を考えてみます。

これは対応する spinor 基底表示を  $[(\mu_Q, \tilde{\lambda}_Q)]$ 、 $[(\mu_R, \tilde{\lambda}_R)]$  とおくと、 $\mu_Q = X\tilde{\lambda}_Q$  と  $\mu_R = X\tilde{\lambda}_R$  の  $X$  に関する解集合を求める問題に他なりません。そのために次の 2 通りのパターンに分けましょう:

- (i)  $\tilde{\lambda}_Q \not\propto \tilde{\lambda}_R$  の時、この2つの spinor を並べて作られる行列  $(\tilde{\lambda}_Q \tilde{\lambda}_R) =: \Lambda$  は階数 2 となり、逆行列が存在するので  $X = (\mu_Q \mu_R) \Lambda^{-1}$  となり、対応する交差集合はただ1つの交点から成ります。
- (ii).  $\tilde{\lambda}_Q = \exists c \tilde{\lambda}_R$  (ただし  $c \in \mathbb{C}^*$ ) の時は、 $\mu_Q = c \mu_R$  すなわち  $Q = R$  の時に限られます。

ここで2つの  $\alpha$  平面の交差集合は、存在するとしたら1点のみからなります。これを  $x_{QR}$  と定義します。(Fig. 2参照。)

### double fibration

さて、複素時空を  $\alpha$ -plane で分解 (2次元葉層構造を与える、と言います) する事を考えましょう。同じ向き (共通の  $\tilde{\lambda}$ ) の  $\alpha$ -plane は、CM 内で交差しませんから、 $\tilde{\lambda}$  を固定して、

$$\text{CM} = \bigcup_{\mu} \widetilde{[(\mu, \tilde{\lambda})]} \quad (96)$$

と  $\alpha$ -plane で分解 (スライスチーズ) できます。<sup>20</sup>

一方で、 $\mathbb{P}$  は、

$$\mathbb{P} = \bigcup_{[\tilde{\lambda}]} \pi^{-1}(\tilde{\lambda}) \quad (97)$$

と、各点の fiber の集まり (スパゲッティの束) とみなせます。

よって、CM の異なる向きのスライス束を束ねた空間

$$\mathbb{F} := \bigcup_{[\tilde{\lambda}]} \bigcup_{\mu} \widetilde{[(\mu, \tilde{\lambda})]} = \bigcup_{Z \in \mathbb{P}} \tilde{Z} \quad (98)$$

は、 $P$  上の fibration とみなせ、各点のファイバーは  $\alpha$ -plane と同一視出来ます。これは  $[\mu, \tilde{\lambda}] \in \mathbb{P}$  を通る、 $\pi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{CP}^1$  の切断をパラメトライズしていますから、

$$\mathbb{F} = \bigcup_{x \in \text{CM}} \hat{x} \quad (99)$$

でもあります。これより、CM と  $\mathbb{P}$  を対称扱った親玉の空間  $\mathbb{F}$  (チーズスパゲッティ) が出現しました。

これより、Fig. 3のような double fibration の構造を得ます：ここで、 $\eta$  は  $\alpha$ -plane または正則切断の“向き”を忘れる写像、 $\tau$  は  $\alpha$ -plane の“向き”または  $\mathbb{P}$  のベース方向 ( $\mathbb{CP}^1$ ) を忘れる写像とします。

<sup>20</sup>いかにも可積分臭がしますね。

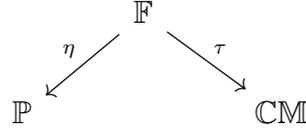


Figure 3:  $\mathbb{C}\mathbb{M}$ と $\mathbb{P}$ の親玉空間 $F$ は、2つの fibration  $\eta : F \rightarrow \mathbb{P}$ と $\tau : F \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{M}$ を与える。

この射影写像を用いて、複素時空 $\mathbb{C}\mathbb{M} = \mathbb{C}^4$ の領域 $U$ に対応する $\mathbb{P}$ の領域 $\eta(\tau^{-1}(U))$ を $\hat{U}$ と表し、逆に $\mathbb{P}$ 上の領域 $W$ に対し、対応する複素時空内の部分多様体を $\widetilde{W}$ と表します。これは $U = \{x\}$ と $W = \{Z\}$ とそれぞれ1点集合を選んだ場合の記法をそのまま援用したものになっています。

### 無限遠領域を加えた場合

4.4節でみたように、 $\mathbb{P} = \mathbb{C}\mathbb{P}^3$ の場合、 $\mathbb{C}\mathbb{M}$ は $\overline{\mathbb{C}\mathbb{M}}$ に置き変わりました。実は $\overline{\mathbb{C}\mathbb{M}}$ は4次元複素時空内に存在する複素2次元平面のなす Grassmann 多様体  $\text{Gr}(2, \mathbb{C}^4)$  で記述されます。この記述は、次節で述べるような自然な拡張を持ちます。

## 5.2 Lie 群による Klein 対応の記述

前節で述べた Klein 対応のほとんど多くの例は、Lie 群とその等質空間で記述可能である事が知られています。これは、Lie 群 $G$ とその部分群 $H$ と $K$ ( $G$ への埋め込み方情報含む)の3つ組で、Fig.fig:Lie group generalization of Klein-Penrose correspondence のような double fibration が存在します。

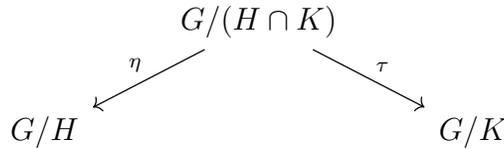


Figure 4: Lie 群・等質空間による twistor 空間・Klein 対応の一般化

前節の最後に扱った、無限遠を付け加えた例は

$$G = U(4) \quad H = U(1) \times U(3) \quad K = U(2) \times U(2) \quad (100)$$

で実現されます。実際、この時の各等質空間は、 $H \cap K = U(2) \times U(1) \times U(1)$  に注意して、それぞれ複素射影多様体  $G/H \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^3$ 、複素 Grassmann 多様体  $G/K \simeq \text{Gr}(2, 4) = \overline{\mathbb{C}\mathbb{M}}$ 、複素旗多様体  $G/(H \cap K) \simeq F(1, 2, 4)$  になります。<sup>21</sup>

<sup>21</sup>正確には、射影多様体も Grassmann 多様体も旗多様体の一種ですが。

さらにその一つの実形を考えてみましょう。すなわち

$$G = \text{Sp}(2) \quad K = \text{Sp}(1) \times \text{Sp}(1) \quad H = U(1) \times \text{Sp}(1) \subset K \quad (101)$$

に取ります。一方で、等質空間は、

$$G/K = \text{Sp}(2)/(\text{Sp}(1) \times \text{Sp}(1)) \simeq S^4 \quad (102)$$

$$G/H = \text{Sp}(2)/(U(1) \times \text{Sp}(1)) \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^3 \quad (103)$$

$$G/(H \cap K) = G/K \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^3 \quad (104)$$

となります。注目すべきなのは、この例では、 $\eta$ が恒等写像となっている事です。これは $S^4$ の null vector が自明なものしか存在しない事に対応しています。また $\tau$ は $\text{Sp}(1) \rightarrow U(1)$ と実質同じであり、ファイバーは $\text{Sp}(1)/U(1) \simeq \text{SU}(2)/U(1) \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ です。このファイバーの数学的意味は次節で述べます。

せっかくなのでもう1個の実形射影についても考えてみましょう。ここでは $G = \text{SO}(4)$ 、 $K = \text{SO}(2) \times \text{SO}(2)$ 、 $H = \text{SO}(3)$ となります。等質空間は $G/H = S^3$ 、 $G/K = S^2 \times S^2$ 、 $G/(H \cap K) = S^3 \times S^2$ になります。 $\tau$ は Hopf-fibration  $S^1 \hookrightarrow S^3 \rightarrow S^2$ を含みます。

### 5.3 twistor 空間の数学的解釈

先に $\tau: \mathbb{F} = \mathbb{P} = \mathbb{C}\mathbb{P}^3 \rightarrow S^4$ という写像を考え、そのファイバーが $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ である事を見ました。この数学的意味について考えてます。

元々ファイバーは $(\text{Sp}(1) \times \text{Sp}(1))/(U(1) \times \text{Sp}(1))$ であった事と、 $\text{Sp}(1) = \text{SU}(2) \sim \text{SO}(3)$ <sup>22</sup>を思い出すと、

$$\text{SO}(4)/U(2) \sim \text{SO}(4)/(\text{SO}(2) \times \text{SO}(3)) = \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \quad (105)$$

とも書けます。

さて、 $\text{SO}(4)$ を $\text{SO}(2) \times \text{SO}(3)$ で割る、というのはどういう事でしょうか？これは $\mathbb{R}^4$ の中から1つの単位ベクトルを選び( $\text{SO}(4)/\text{SO}(3)$ を得る操作)、次にそれに直交する $\mathbb{R}^3$ からまた1つの単位ベクトルを選ぶ操作(さらに $\text{SO}(2)$ で割る操作)になります。

この解釈をもう少し押し進めてみましょう。そのために $\mathbb{R}^4$ 上の複素構造について考えてみます。複素構造は、実軸と虚軸の各ペアを定める、あるいは各複素平面のとり方に他なりません。例えば(16)では、 $x^1$ 軸と $x^2$ 軸、 $x^3$ 軸と $x^4$ 軸がそれぞれペアになって、複素平面 $z$ と $w$ を作り出していました。

4つの軸( $\mathbb{R}^4$ の単位ベクトル)からある1つの軸(例えば $x^4$ )を選びます。するとこの軸とペアを組む軸が $\mathbb{R}^3$ の単位ベクトル $u \in S^2$ を選ぶ事で、複素数が定義されます。

<sup>22</sup>ここでの $\sim$ は up to covering を意味。

残る 2 軸については、複素平面の組み方は (向きを除いて) 一意に定まるので、 $\mathbb{R}^4$  の複素構造は  $S^2$  でパラメトライズされます。

よって、今回扱う twistor 空間  $\mathbb{P}$  とは、元の空間とその上の複素構造の選び方を定める集まりに他なりません。

## $\alpha$ -plane と複素構造

複素時空  $\mathbb{CM}$  または Euclidean 時空  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^4$  に戻しましょう。先の議論から  $\alpha$ -plane の向きの選択は、複素構造の選択と関わりがある事が示唆されました。これを具体的に見てみます。

(83)、(91) とを思い出すと、 $\mu^\alpha$  の正則関数  $f$  を考えると、

$$\partial_\alpha \mu^\alpha \quad (106)$$

が成り立ちますから、 $\partial_\alpha$  は反正則座標による微分と見なせます。

ところで、対応する共変微分  $D_\alpha$  は (93) より、 $A$  が ASD 方程式の解であるならば可換でした。

これは方程式

$$D_\alpha f(\mu, \bar{\mu}) = 0 \quad (107)$$

が局所的に解け、 $G = GL(N, \mathbb{C})$  の時は、 $N$  個独立な、 $\mu^\alpha$  の正則関数が存在する事を意味しています。よって、ASD 方程式は、 $\mathbb{P}$  上の正則ベクトルと関わりがありました。次の節で、実際に 1 対 1 写像を構成していきます。

## 6 Penrose-Ward 対応

さて、いよいよ本稿の重要な事実である、非線形微分方程式である ASD 方程式の解と、対応する射影 twistor 空間上の正則ベクトル束の間に 1 対 1 対応がある事を示します。なお、ここでも複素時空上で考える事に留意してください。

### 6.1 反自己双対接続・gauge 場から正則ベクトル束を構成へ

正則ベクトル束は次のデータから構成される事を思い出しましょう。

- 開被覆とその上の (正則な) 局所自明化
- 2 つの開被覆に対し、正則な変換関数。ただし変換関数は cocycle 条件を満たす

まずは ASD 方程式 (51) の解が与えられた時に、 $\mathbb{P}$  上の正則ベクトル束が構成できる事を見ていきます。

## 開被覆の定義

まず  $\mathbb{P}$  上には、 $\mathbb{P}$  でパラメトライズされる自然な開被覆が定義できる事を示します。 $\mathbb{P}$  の点  $Q$  に対し、 $\mathbb{P}$  の部分集合を

$$W_Q := \{Z \in \mathbb{P} \mid \tilde{Q} \cap \tilde{Z} \neq \emptyset, Z \neq Q\} \quad (108)$$

で定めましょう。ここで2つの  $\alpha$ -plane  $\tilde{Q}, \tilde{R}$  の交差集合は、存在するとしたら1点  $x_{QZ}$  のみからなる事を思い出しましょう。

$W_Q$  が (連結かつ単連結な) 開集合である事は、 $Q \notin W_Q$  である事に注意すると、

$$W_Q = \{[(\mu, \tilde{\lambda})] \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \mid [\tilde{\lambda}] \neq [\tilde{\lambda}_Q] \text{ in } \mathbb{C}\mathbb{P}^1\} \simeq \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C} = \mathbb{C}^3 \quad (109)$$

となり、 $\mathbb{C}^3$  に同型な事から従います。

## Remark

上の対応から  $W_Q = W_R \iff \pi(Q) = \pi(R)$  が成り立ち、開被覆としては  $\mathbb{P}$  ではなく  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  でパラメトライズされる事が分かります。<sup>23</sup> 要するに、 $W_P$  は  $P$  を通るファイバー  $\pi^{-1}(\pi(P))$  を  $\mathbb{P}$  から取り除いたものに過ぎません。これはベースの  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  から見ると、 $P$  を無限遠点と思って取り除き、複素平面を得たとも言えます。

なお、この開被覆は代数幾何で Zariski 位相と呼ばれているものと同じであり、Hausdorff 空間ですらありません。しかし開被覆に物理的な意味があるわけではないので、そういう事は気にせず、ベクトル束を記述する道具と割り切る事にします。

## $\mathbb{P}$ 上のベクトル空間の割り当て

今、ベクトル束を構成したいので、 $\mathbb{P}$  の各点  $Z$  にベクトル空間を割り当てましょう。これは複素時空の  $\alpha$ -plane  $\tilde{Z}$  に対し、ベクトル空間を割り当てられる事と等価です。

$\tilde{Z}$  上では (83) が定義されていましたが、前節の複素構造の議論を思い出すと、Frobenius の可積分性定理より

$$D_\alpha \psi = 0 \quad \text{for } \alpha = 1, 2 \quad (110)$$

の独立な  $N$  個の解が  $\tilde{Z}$  上で定義されます。この解空間は階数  $N$  の  $\mu^\alpha = x^{\alpha\dot{\alpha}} \tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}}$  に関して正則なベクトル空間をなします。

ベクトル空間が解空間  $\text{Ker } D_\alpha^{\tilde{\lambda}}$  として定義されたわけですが、微分方程式は1階の系でしたので、1点での初期値を定めれば、後は  $\tilde{Z}$  上で一意に定まる事が期待されます。実際に1点でのベクトル空間から、解空間への同型が存在します。 $W_Q$  上での自明化を

<sup>23</sup>しかし実は後で見ると、その上の自明化まで考えると、こちらは  $\mathbb{P}$  でパラメトライズされる事が分かります。

選べば、この同型は固定されているはずですが、ではどの点を選んでくるのが良いでしょうか？

答えは簡単で、 $Z \in W_Q$  の時、 $\pi(Q) \neq \pi(Z)$  で異なるファイバーにいるので、 $Z$  と  $Q$  を通る切断  $\hat{x}_{QZ}$  あるいは対応する時空の点  $x_{QZ} = \tilde{Q} \cap \tilde{Z}$  が存在します。よって、この点でのベクトルの値  $\psi(x_Q R)$  を取ってくれば良い事が期待されます。<sup>24</sup>

### 変換関数の割り当て

$W_Q$  から  $W_R$  への変換関数を  $G_{RQ}^E$  と書きましょう。これは  $W_Q \cap W_R$  上の関数です。さて、その上の点  $Z$  上では  $N \times N$  の正則行列となります。これを定めましょう。

まず  $x_{QZ}$  から  $x_{RZ}$  への  $\tilde{Z}$  上に沿ったパスを  $\gamma_{RQ}^Z$  と書きます。 $\tilde{Z} \simeq \mathbb{C}^2$  ですので、異なるパスを取ったとしても連続変形で互いに移り変わります。すなわち、この連続変形の同一視で割ったパスの homotopy 類は自明となり、代表元を  $[\gamma_{RQ}^Z]$  と表します。この時、 $x_{QZ}$  から  $x_{RZ}$  への gauge 場  $A$  による holonomy

$$W_{\gamma_{RQ}^Z}[A] := \mathcal{P} \exp \left[ \int_{\gamma_{RQ}^Z} A \right] \quad (111)$$

が定まります。

ここで  $\mathcal{P}$  は path-ordering と呼ばれる操作を表す記号ですが、ここでは定義しません。代わりに 2次元平面上の微分方程式

$$D_A W(x) = \left( \frac{\partial}{\partial x} - A(x) \right) W(x) \quad W(x_*) = 1_G \quad (112)$$

を考えます。ただし、ここで  $A(x)W(x)$  は  $G$  の  $\mathfrak{g}$  への右作用です。また対応する電磁場/曲率は 0 である事に注意すると、これは (局所的な) 解が存在するための Frobenius 可積分条件に他なりません。実際に path-ordering と解による定義の定式化と等価なのはこの時に限ります。

また CM の各点  $x$  における gauge 場は Lie 代数  $\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$  に値を取るため、この holonomy の値は  $GL(N, \mathbb{C})$  に値を取ると期待されます。

さて、上記観察は、次の主張 (実際に数学的に正しい) にまとめられます：

### Fact : 非可換磁場がない場合の非可換 Aharnov-Bohm 効果

- $A$  が  $G$ -主束に付随する接続 (gauge 場) である時、 $W_{\gamma_{RQ}^Z}[A] \in G$
- $A$  が  $\tilde{Z}$  上 flat の時、 $W_{\gamma_{RQ}^Z}[A]$  はパスの homotopy 類  $[\gamma_{RQ}^Z]$  のみに依存する

<sup>24</sup>正則性は Frobenius の定理と  $x$  の  $\mu, \tilde{\lambda}$  に関する具体的な表示から保証されます。

なお、2つ目の主張から  $W$  は  $\gamma$  依存性を落として、 $x$  の関数として定められます。<sup>25</sup>  
そして

$$G_{RQ}^E(Z) := W_{[\gamma_{RQ}^Z]}[A] \quad (113)$$

と定めると、実際にこれは  $W_Q$  上の自明化  $\psi(x_{QZ})$  から  $W_R$  上の自明化  $\psi(x_{RZ})$  への写像となっています。

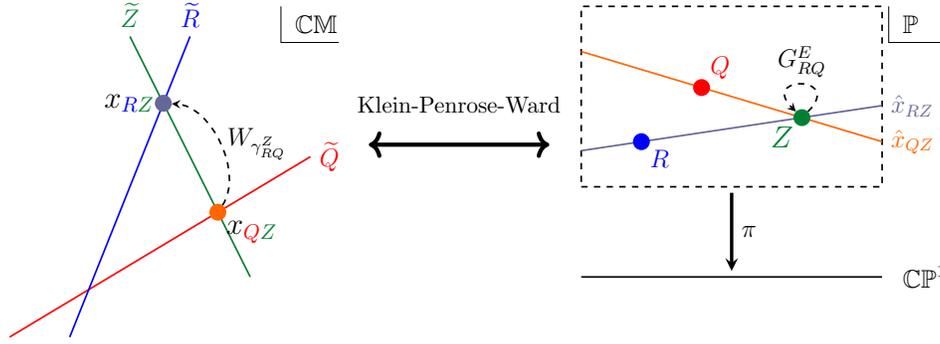


Figure 5:  $W_Q$  から  $W_R$  への  $Z$  における変換関数の値は、 $x_{QZ}$  から  $x_{RZ}$  への  $\tilde{Z}$  に沿った適当なパスの holonomy で与えられます。

なお、パスの homotopy 類は自明ですので、パスの合成は一意に定まり、cocycle 条件は必ず満たされます。また  $x_{QZ}$  も  $x_{RZ}$  も  $Z$  の正則関数であり、上記の構成から、この変換関数は  $Z$  について正則であると言えます。

よって、ASD 接続  $A$  が与えられた時に、このようにして正則ベクトル束  $E$  が定義される事が分かりました。

### Remark

$\pi(Q) = \pi(R)$ 、すなわち  $Q$  と  $R$  が  $\mathbb{CP}^1$  上の同一ファイバーにある時、 $W_Q = W_R$  でした。しかしこの時、 $G_{RQ}^E$  は一般に恒等元ではありません。実はこれは自明化の取り換えに相当します。というのも、 $W_Q = W_R = W_Q \cap W_R$  であり、この共通の領域上で  $G$  に値を取る関数が定義されています。

しかし今 cocycle 条件が存在するので、結局、正則ベクトル束のデータとしては、 $\mathbb{CP}^1$  でパラメライズされるパッチ  $W_{\pi(Q)}$  間の変換関数だけあれば十分です。<sup>26</sup>

### 自明化条件

勘の良い方は、お気づきかもしれませんが、先に構成した変換関数はある特殊な性質を実は満たします。

<sup>25</sup> 1 価である事は一般に保証されませんが、今  $\tilde{Z}$  は単連結なので 1 価関数です。すなわち  $\tilde{Z}$  上の基点  $x_*$  を固定し、基点から  $x$  への  $\tilde{Z}$  に沿ったパスを  $\gamma_x^Z$  とかくと、 $W_{\gamma_x^Z}[A] := W^{A,Z}(x)$  と表せます。

<sup>26</sup> 後の節で具体的に見るように、もちろん実際はもっと少ないデータだけで決まります。

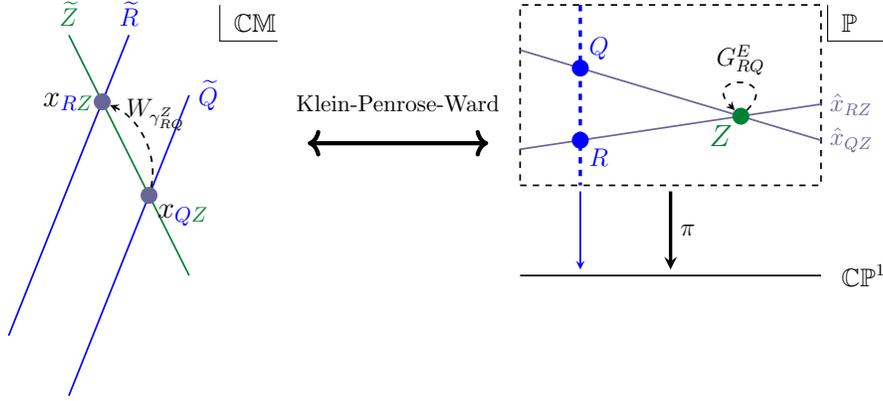


Figure 6:  $Q$ と $R$ が同一のファイバーに存在する時は、ベクトル束の局所自明化の取り換えに相当します。

それは、 $x_{QZ} = x_{RZ}$  の場合、 $G_{RQ}^E(Z) = 1_G$  です。上記条件が満たされるのはいつでしょうか？これは3つの  $\alpha$ -plane  $\tilde{Q}$ 、 $\tilde{R}$ 、 $\tilde{Z}$  が1点で交差する時に他なりません。よってこの交点を  $x_{QRZ}$  とおくと、 $Q$ 、 $R$ 、 $Z$  は同一の射影直線  $\hat{x}_{QRZ}$  上に存在します。ただし  $Q, R \in \hat{x}_{QRZ} \setminus \{Z\} \simeq \mathbb{C}$  に注意。

よって、 $W_Q \cap W_R$  上で変換関数  $G_{RQ}^E$  は定数  $1_G$  になるので、これは射影直線  $\hat{x}_{QRZ}$  上に制限した時に、自明束である事を意味しています。またベースへの制限が正則同型となるような任意の射影直線に対し、これが成立します。

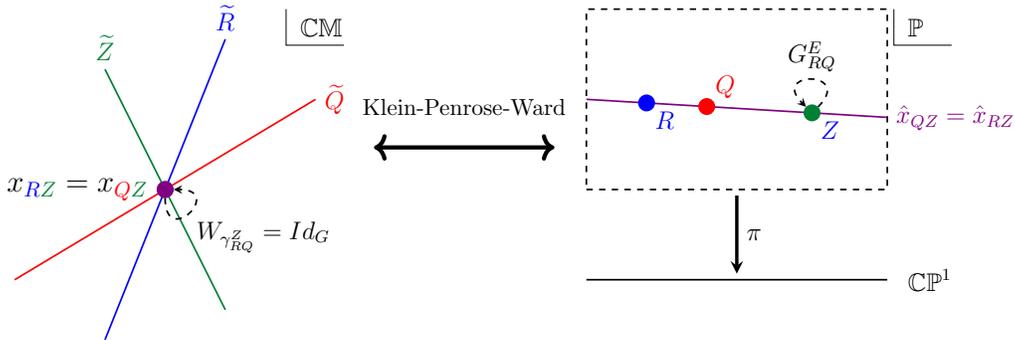


Figure 7: 3つの  $\alpha$ -plane が1点で交差する場合、対応する twistor 空間上の3点は、 $\mathbb{P}$  の意味で一直線上に存在します。

まとめると、ASD 接続から構成された正則ベクトル束  $E$  は、CM の任意の点  $x$  に対して定まる  $\mathbb{P}$  内の射影直線  $\hat{x}$  に制限すると、自明束となる、という性質を満たします。逆に言えば、正則ベクトル束から ASD 接続  $A$  を得用途する場合、出発点となる正則ベクトル束  $E$  はこの性質を満たさなければなりません。

## 6.2 正則ベクトル束から反自己双対接続・ gauge 場へ

今度は逆の変換を考えてみましょう。ただし先の構成を逆をたどるだけなので、(技術的詳細を無視すれば) ほぼ自明です。

gauge 場を得る事は、任意のパスの holonomy を知ることと同値です。しかし時空上の点  $x$  での節ベクトルは、null vector のみで生成されるため (基底をなす)、 $\alpha$ -plane に制限しても問題ありません。よって、この  $\alpha$  平面  $\tilde{Z}$  上の 2 点  $x, y$  を選び、 $x$  から  $y$  への holonomy が分かれば良さそうです。ただし  $x$  と  $y$  を決めた時に、holonomy が一意に定まるならば、パスの homotopy 類に依存しない事に注意してください。また  $x = y$  の時、 $G$  の恒等元  $1_G$  に一致するという付加条件も存在します。

さて、 $\hat{x}$  の  $Z$  以外の点  $Q$  と、 $\hat{y}$  の  $Z$  以外の点  $R$  を 1 つ取ってきましょう。この時、 $G_{RQ}^E(Z)$  が holonomy と同一視できる、というのが先の構成からの帰結です。しかし困った事に、 $Q$  と  $R$  の選び方は一意ではなく、しかも  $G_{RQ}^E(Z)$  の値は  $Q, R$  の選択で変わってしまいます。 $Q$  や  $R$  の選択は、 $W_Q$  や  $W_R$  における自明化の選択に他なりません。これは複素時空側では、どのように解釈されるのでしょうか？

今、 $R$  を固定し、 $Q$  のみを動かす事を考えます。すると、 $G_{RQ}^E(Z)$  に右から  $G$  を作用させる自由度に対応します。これは holonomy の言葉では、 $x = x_{QZ}$  に  $G$  の自由度を割り当てる事を意味します。よって、複素時空の各点で独立に  $ad_P$  の自明化を取り替えるこの自由度は、gauge 変換に他なりません。

よって、gauge 自由度を除いて、 $\tilde{Z}$  上の holonomy が一意に定まる事が分かりました。<sup>27</sup> これより、

$$A^{RQ}|_{\tilde{Z}} = W^{-1}(x)dW(x) = (G_{RQ}^E)^{-1}(Z)\partial G_{RQ}^E(Z) \quad (114)$$

で gauge 場・接続を定めると、これは  $\tilde{Z}$  上 flat なので、instanton 解あるいは ASD 接続に他なりません。

## 6.3 $N = 1$ case

気が向いたら書きます。

## 7 Atiyah-Ward による正則ベクトル束の構成

前節で見た一般論を、具体的な話に落としてみます。

<sup>27</sup>射影直線に制限した際、自明束であるという条件から、 $x = y$  の時、holonomy が自明になる、という条件に一致します。

## 7.1 A toy example with the Grothendieck-Birkhoff factorization

ハイテンションになったら書き上げます。

## 7.2 Atiyah-Ward Ansatz

この節では、 $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  の場合を考えます。 $\mathbb{P}$  上の点  $N, S$  として、 $\tilde{\lambda}_1 = 0$ 、 $\tilde{\lambda}_2 = 0$  をそれぞれ満たすファイバー上の点を取ります。この時、 $E$  は変換関数  $G_{NS}^E$  を定めれば一意に決まります。

さてこの変換関数について、次の形を仮定しましょう。

$$G_{NS}^E = \begin{pmatrix} \zeta & \phi(\mu, \tilde{\lambda}) \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}. \quad (115)$$

この時、ベクトルの第1成分、第2成分にそれぞれ射影すると、部分直線束  $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^3}(\mp 1)|_{\mathbb{P}} = \mathcal{O}(\mp 1)$  が得られます。この2つの直線束を用いて、 $E$  は短完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-1) \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}(-1) \rightarrow 0 \quad (116)$$

で特徴づけられます。よって、

$$\phi \in H^1(\mathbb{P}, \mathcal{O}(-1) \otimes \mathcal{O}(1)^*) \simeq H^1(\mathbb{P}, \mathcal{O}(-2)) \quad (117)$$

とみなします。

さて、射影直線  $\hat{x}$  に制限した時に自明束である事から、ある  $W_{N/S}$  上それぞれ正則な  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  値  $F_{N/S}$  が存在し、

$$G_{NS}^E = F_N F_S^{-1} \quad (118)$$

のように分解されます。これを用いて、 $W_N$ 、 $W_S$  上の正則切断をそれぞれ

$$A_\alpha^{(N)} := F_N^{-1} \partial_\alpha F_N \quad A_\alpha^{(S)} := F_S^{-1} \partial_\alpha F_S \quad (119)$$

と定めましょう。

一方で、変換関数を  $\mu$  の反正則ベクトル場  $\partial_\alpha$  で微分してみます。 $\partial_{\mathbb{R}} \mu^\beta = \partial_{\mathbb{R}} \zeta = 0$  を思い出すと、

$$0 = \partial_\alpha G_{NS}^E = F_S [F_N^{-1} \partial_\alpha F_N - F_S^{-1} \partial_\alpha F_S] F_S^{-1} \quad (120)$$

すなわち

$$A_\alpha^{(N)} = A_\alpha^{(S)} \quad (121)$$

が  $W_N \cap W_S$  上で成り立ちます。ここで  $\zeta \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  上の関数だと見なし、 $\partial_\alpha$  が  $\zeta$  について 1 次であった事を思い出すと、この貼りあわせた切断は  $\zeta$  について 1 次でなければなりません。(Liouville の定理の拡張)

この条件は、 $\phi(\mu, \tilde{\lambda}) = \phi(x, \tilde{\lambda})$  について制約を課し、 $\zeta$  に関する定数部分を  $\phi_0$  とかくと、 $\psi(x) := \exp(\psi_0)$  と定義すると、波動方程式

$$\partial_{\dot{\alpha}\alpha} \partial^{\alpha\dot{\alpha}} \psi = 0 \quad (122)$$

が得られます。この事は、 $\phi \in H^1(\mathbb{P}, \mathcal{O}(-2))$  と Penrose 変換によって対応する事が知られています。

### 7.3 1-instanton 解

さて、波動方程式 (122)

$$\sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^2 \psi = 0 \quad (123)$$

の解が分かれば、変換関数  $G_{NS}^E$  の BG 分解 (118) と  $\alpha$ -plane 上に射影した接続との関係 (119) から、ADS 方程式の解である ASD 接続、あるいは instanton 解が得られるはずですが。

$k$  個の要素から成る添字集合でラベルされ、その元を  $I$  で表すと、それぞれ 5 個のパラメータ  $x_I = (x_I^i)_{i=1,2,3,4} \in \mathbb{K}^4$  と  $\Lambda_I \in \mathbb{K}$  を持つとして、

$$\psi(x) = \sum_{I=1}^k \frac{\Lambda_I}{(x^i - x_I^i)^2} + \lambda_0 \quad (124)$$

は  $k$  個の点  $x_I$  を除いた領域で (123) の解になっています。overall factor は重要でないので、( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  の時に)  $\Lambda_0 = 1$  と置いたこの instanton 解は 't Hooft 解と呼ばれています。ちなみに  $\Lambda_0 = 0$  とおいた解は Jackiw-Nohl-Rebbi 解と呼ばれる別の解になります。

これを用いて、 $A_\alpha$  を経由して、ASD part の曲率  $F$  を計算すると

$$F_{z\bar{w}} = f(r) \begin{pmatrix} -\bar{z}w & -w^2 \\ \bar{z}^2 & \bar{z}w \end{pmatrix} \quad F_{\bar{z}w} = f(r) \begin{pmatrix} -z\bar{w} & -z^2 \\ \bar{w}^2 & -z\bar{w} \end{pmatrix} \quad (125)$$

$$F_{z\bar{z}} = f(r) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(w\bar{w} - z\bar{z}) & -zw \\ -\bar{z}\bar{w} & -\frac{1}{2}(w\bar{w} - z\bar{z}) \end{pmatrix} \quad F_{w\bar{w}} = -F_{z\bar{z}} \quad (126)$$

が得られます。ただし  $r^2 := (x_i - x_{i,A=1})(x^i - x_A^i)$  と  $f(r) := \frac{8\Lambda}{r^2(\Lambda + r^2)}$  を導入しました。  $\Lambda = R^2$  とおくと、エネルギー密度は

$$-\text{Tr} [F \wedge *F] = \frac{48R^4}{(r^2 + R^2)^4} \quad (127)$$

で与えられる事が分かります。さらにこれを  $\mathbb{R}^4$  上で積分してみると、

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4x (-\text{Tr} [F \wedge *F]) = 8\pi^2 \quad (128)$$

となり、今は反自己双対解であるので、instanton 数が  $-1$  である事が確認できました。

## 7.4 コメント

時間がないので、今回の話で関係しそうなキーワードを列挙しておきます。興味がある方は調べてみてください。

### instanton と関係するキーワード

- moduli 空間と特異点、非可換時空
- 超弦理論 (brane construction) との関係
- 4次元  $\mathcal{N} = 2$  超対称ゲージ理論との関係
- Horrock-Barth 構成
- Atiyah-Hitchin-Drinfeld-Manin 構成
- 指数定理
- 可積分方程式の統一理論

### twistor と関係するキーワード

- Penrose 変換 (John 変換、Radon 変換の複素幾何による一般化)
- 一般化 Penrose 変換
- monopole 解のセットアップ
- gravitaional instanton
- twistor string
- Yang-Mills 理論における散乱振幅
- 双対超共形対称性

## 8 参考文献

本稿は主に以下の4つの文献に依る部分が大きいです。

- R.S.Ward & R.O.Wells Jr, “Twistor Geometry and Field Theory (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)”
- M.Atiyah, “Geometry of Yang-Mills fields”
- M.Atiyah & R.S.Ward, “Instantons and algebraic geometry”, Comm. Math. Phys., Volume 55, Number 2 (1977), 117-124.
- L.J.Mason & N.M.J.Woodhouse, “Integrability, Self-Duality, and Twistor Theory (London Mathematical Society Monographs New Series)”

また以下の文献も少なからず参考にしています。

- 高崎金久, “ツイスターの世界 一時空・ツイスター空間・可積分系”
- R.Penrose & W.Rindler, “Spinors and Space Time Volume 1&2 (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)”
- N.J.Hitchin, G.B.Segal & R.S.Wald, “Integrable systems”
- M.Dunajski, “Solitons, Instantons and Twistors”
- R.J.Baston & M.G.Eastwood, “The Penrose Transform”
- S.A.Huggett & K.P.Todd, “An Introduction to Twistor Theory: Second Edition (London Mathematical Society Student Texts)”
- Y.I.Manin, “Gauge Field Theory and Complex Geometry”
- R.O.Wells, “Complex manifolds and mathematical physics”, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), Volume 1, Number 2 (1979), 296-336.
- L.Mason & Y.Nutku, “Geometry and Integrability”, Lond.Math.Soc.Lect.Note Series 295
- “ツイスター理論の拡がり”, 数理科学 2006年10月, サイエンス社
- 浜中真志, “ADHM/Nahm 構成法とその双対性”,  
[http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~masashi.hamanaka/soken\\_adhmn.pdf](http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~masashi.hamanaka/soken_adhmn.pdf)
- 伊藤克司, “N=2 超対称ゲージ理論とインスタントン (2004年度原子核三者若手夏の学校 素粒子論パート 講義, 講義ノート)”,  
[https://www.jstage.jst.go.jp/article/soken/116/4/116\\_KJ00005059943/\\_article/-char](https://www.jstage.jst.go.jp/article/soken/116/4/116_KJ00005059943/_article/-char)